

编号:

班级:

姓名:

第 2 页

一. 信号

1. 信号的分类

时 幅	连续	离散
连续	模拟	抽样
离散	量化	数字

2. 信号的分解

① 收敛性质

1) $f(t) = \int d\lambda |a_\lambda \times a_\lambda| f(t)$
 eg. $t/\sigma(t); LT/e^{st}; FT/e^{j\omega t}$

2) $f(t) = \sum |a_i \times a_i| f(t+mT)$
 eg. $t/\sigma(t); FS/e^{jn\frac{2\pi}{T}t}; LT, FT$

3) $f(n) = \int d\lambda |a_\lambda \times a_\lambda| f(n)$
 eg. $n/\sigma(n); ZT/Z^{n-1}; DTFT/e^{j\omega n}$

4) $f(n) = \sum |a_i \times a_i| f(n+rN)$
 eg. $n/\sigma(n); DFS/e^{j\frac{2\pi}{N}nk}; ZT, DTFT$

正交: $\langle a_n | a_{n'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda')$
 $\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}$

完备: $\int dt \langle f(t) | f(t) \rangle = \int d\lambda \langle a_\lambda | a_\lambda \rangle$
 $\int dt \langle f(t) | f(t) \rangle = \sum \langle a_i | a_i \rangle$
 $\sum \langle f(n) | f(n) \rangle = \int d\lambda \langle a_\lambda | a_\lambda \rangle$
 $\sum \langle f(n) | f(n) \rangle = \sum \langle a_i | a_i \rangle$

② 相关性质

能量信号:

1) $R_{12}(t) = \langle f_2(t-T) | f_1(t) \rangle = R_{21}^*(t)$
 $E_1 = R_{11}(0)$

2) $R_{12}(m) = \langle f_2(n-m) | f_1(n) \rangle = R_{21}^*(m)$
 $E_1 = R_{11}(0)$

功率信号:

3) $R_{12}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle f_2(t-T) | f_1(t) \rangle = R_{21}^*(t)$
 $P_1 = R_{11}(0)$

4) $R_{12}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle f_2(n-m) | f_1(n) \rangle = R_{21}^*(m)$
 $P_1 = R_{11}(0)$

二. 系统

1. 系统的分类

集总: 常微(差) 分布: 偏微(差)

连续: 微 离散: 差

无记忆: 代数 有记忆: 微(差)

线性: 叠加 & 齐次 非线性: 非叠加 | 非齐次

时变: $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$ 时不变: $x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

可逆: 单射 & 满射 不可逆: 非单 | 非满

因果: $x(t-t_0) \rightarrow y(t)$ 非因果: $x(t-t_0) \rightarrow y(t)$

稳定: BIBO 不稳定: BIBO

主要研究: LTZ; 确定输入, 集总, 线性, 时不变

输入输出模型: 状态变量模型.
 $t \rightarrow s \rightarrow \Omega \rightarrow \omega; n \rightarrow z \rightarrow \omega \rightarrow \omega$

2. 系统的分解

① 方框图

② 信号流程图 Mason.

A1:

$$N[\varphi(t)] = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \varphi(0)$$

分部函数 $\delta(t)$: 将 $\varphi(t)$ 赋为 $\varphi(0)$

检验函数 $\varphi(t)$: $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $\varphi(t) \neq 0$, $a < t < b$, $-\infty < a, b < \infty$

① $a\delta + b\delta = (a+b)\delta$

② $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

③ $\delta(\omega t) = \frac{1}{|\omega|} \delta(t) \Rightarrow \delta(t)$ 偶函数

④ $\delta[f(t)] = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t-t_i)$

$$N_{(k)}[\varphi(t)] = \langle \delta^{(k)}(t), \varphi(t) \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

上式用分部积分和 $\varphi(t)$ 性质可证: $\delta^{(k)}(t)$ 强度 \sim 近似过程中所围面积

① 相乘: 由分部积分可得任意阶下的结果

② $\delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{a^k} \delta^{(k)}(t) \Rightarrow \delta^{(k)}(t)$ 列奇 k 为偶

$$N_{e^{j\omega t}}[\varphi(t)] = \int_a^b e^{j\omega t} \varphi(t) dt \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \quad (-\infty < a, b < \infty) \text{ 黎曼-勒贝格定理}$$

① $\omega \rightarrow \infty$ 时, $e^{-j\omega t} = e^{j\omega t} = \cos \omega t = \sin \omega t = 0$.

三. 时域信号与系统

1. 描述

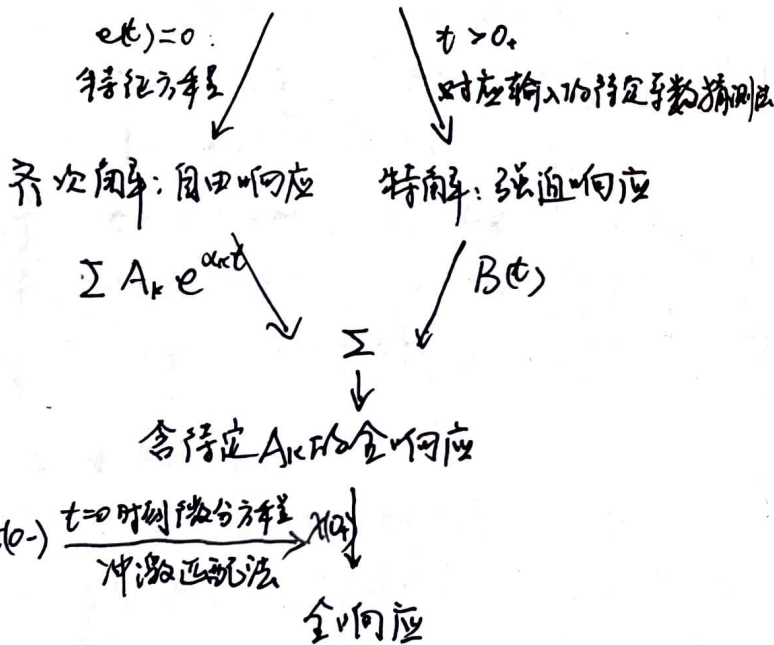
$$\textcircled{1} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

$$\textcircled{2} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

2. 求解

① 自由响应 + 强迫响应

微分方程



$$r(t) = [r_{zs}(t) + r_{zi}(t)] u(t) = H[e(t)] + H[x(0_+)]$$

$$= H\left[\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t-\tau) d\tau\right] + H[x(0_+)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau + H[x(0_+)]$$

$$= e(t) * h(t) + H[x(0_+)]$$

零状态线性 零输入线性

3. 系统函数

- ① 可逆性: $h(t) * \tilde{h}(t) = \delta(t)$
- ② 因果性: $h(t) = h(t) u(t)$
- ③ 稳定性: BZBO:

$$|r(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e(t-\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |e(t-\tau)| d\tau$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

$$\therefore \text{应有 } \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

① 零状态响应 + 零输入响应

零状态

零输入

$$e(t) \rightarrow H[e(t)] = r_{zs}(t) = \sum A_{zsk} e^{\alpha_k t + B(t)}$$

$$x(0_+) \rightarrow H[x(0_+)] = r_{zi}(t) = \sum A_{zik} e^{\beta_k t}$$

$$\begin{cases} x_{zs}(0) = 0 \\ x_{zs}(0_+) \text{ by 冲激匹配法} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{zi}(0) \text{ 已知} \\ x_{zi}(0_+) = x_{zi}(0_-) \end{cases}$$

$x_{zs}(t)$ 中含 δ , when $x_{zi}(t)$ 中不含 δ

$e(t)$ 中 δ 阶数 $>$ 方程阶数;
冲激匹配法得.

四. s域信号与系统

1. 描述

① $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, s = \sigma + j\omega$

$ROC = \{s \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty\}$ 带状

左边信号: $ROC = \{s \mid (-\infty < t < \sigma_r)\}$

右边信号: $ROC = \{s \mid (\sigma_l < t < \infty)\}$

双边信号: $ROC = \{s \mid \sigma_l < \sigma < \sigma_r\}$

② $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{P_i} \text{Res}[F(s)e^{st}, P_i]$

($\sigma \in ROC$), 对于同一 $F(s)$.

if $ROC = \{s \mid (-\infty) < \sigma < \sigma_r\}$, $f(t) = f(t)u(t)$

if $ROC = \{s \mid (\sigma_l) < \sigma < \infty\}$, $f(t) = f(t)u(-t)$

if $ROC = \{s \mid \sigma_l < \sigma < \sigma_r\}$, $f(t) = f_1(t)u(t) + f_2(t)u(-t)$

2. 求解

零状态下 $r(t) = e^t * h(t)$, 故

$R(s) = E(s) \cdot H(s), ROC(R) = ROC(E) \cap ROC(H)$

线性常系数描述的系统之 $H(s)$ 为有理函数, 由代数基本定理, $H(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)}$

① 实单极点

$\begin{cases} m < n: \text{部分分式} & K_i = (s-p_i)H(s)|_{s=p_i} \\ m > n: \text{长除法} & L^{-1}(s^k) = \delta^{(k)}(t) \end{cases}$

② 共轭极点

$\begin{cases} \frac{1}{s^2+p_1^2} \cdot \frac{1}{s+p_2} = \frac{as+b}{s^2+p_1^2} + \frac{k}{s+p_2} \\ \frac{1}{s^2+p_1^2} \cdot \frac{1}{s^2+p_2^2} = \frac{K_1}{s+jp_1} + \frac{K_1^*}{s-jp_1} + \frac{K_2}{s+jp_2} + \frac{K_2^*}{s-jp_2} \end{cases}$

③ 多重极点

$F(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{K_{1k}}{s-p_1} + \frac{E(s)}{P(s)}$

$K_{11} = H(s) \cdot (s-p_1)^k |_{s=p_1} = H_1(s)|_{s=p_1}$

$K_{12} = \frac{H_1(s) - K_{11}}{s-p_1} |_{s=p_1} = H_2(s)|_{s=p_1}$

$K_{13} = \frac{H_2(s) - K_{12}}{s-p_1} |_{s=p_1} = H_3(s)|_{s=p_1}, \dots$

$L^{-1}(\frac{t^n}{s^{n+1}}) = \pm \frac{t^n}{n!} u(\pm t)$

3. 系统函数

① 可逆性: $H(s) \cdot \tilde{H}(s) = 1$

② 因果性: 对有理函数 $H(s)$, ROC 为某右半平面

③ 稳定性:

1) 稳定 $\Leftrightarrow ROC$ 含 $j\omega$ 轴

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)e^{-\sigma t}| dt |_{\sigma=j\omega} < \infty \Rightarrow |H(s)|_{\sigma=j\omega} < \infty$

2) 临界稳定 $\Leftrightarrow ROC$ 以 $j\omega$ 轴为界

3) 不稳定 $\Leftrightarrow ROC$ 不包含 $j\omega$ 轴

A3: Laplace 变换性质.

① $\frac{d}{dt} \rightarrow s$ $\int_{-\infty}^t \rightarrow \frac{1}{s}$ $\frac{d}{ds} \rightarrow -t$ $\int_s^{\infty} \rightarrow \frac{1}{t}$

② t move: $f(t-t_0) \rightarrow e^{-st_0} F(s)$ R

③ s move: $e^{s_0 t} f(t) \rightarrow F(s-s_0)$ R 移

④ R 度: $f(at) \rightarrow \frac{1}{|a|} F(\frac{s}{a})$ R/a

⑤ 共轭: $f^*(t) \rightarrow F^*(s^*)$ R

⑥ 卷积: $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$ 至少 $R_1 \cap R_2$

⑦ 初值: if $f(t) = f(t)u(t)$ 且 $f(t)$ 中含有 $k\delta(t)$, then $f(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - k]$

⑧ 终值: if $f(t) = f(t)u(t)$ 且 $F(s)$ 稳定 or -1 阶极点 $P=0$, then $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

⑨ 相关: $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$

A4:

① 暂态响应: $R(s)$ 稳定 \Rightarrow H & E 稳定

稳态响应: $R(s)$ 临界稳定 \Rightarrow H/E 临界稳定: 其余稳定.

发散响应: $R(s)$ 不稳定 \Rightarrow H/E 不稳定.

特例: H, E 零极相消.

② 自由响应: H(s) 造成.

强迫响应: E(s) 造成.

特例: H 和 E 有相同极点, 将 $R(s)$ 部分分式分解后极点个数与 H 相同的项为自由响应

③ 一阶全通系统 $H_1(s) = \frac{s-s_p}{s+s_p^*}$, 二阶... $H_2(s) = \frac{s-s_p}{s+s_p^*} \cdot \frac{s-s_p}{s+s_p^*}$, 一般 $H_{ap}(s) = \prod_i H_{1i}(s) \cdot \prod_j H_{2j}(s)$

性质: $-\frac{d}{d\omega} \phi_{ap}(\omega) > 0$.

最小相位系统: 零极点都在虚轴之左(上).

性质: 稳定因果的最小相位系统: $H(s) = H_{ap}(s) \cdot H_{min}(s)$.

性质: $-\frac{d}{d\omega} \phi(\omega) > -\frac{d}{d\omega} \phi_{min}(\omega)$, $\prod_i |H_{1i}(j\omega)| = |H_{min}(j\omega)|$, $\angle \langle h_{min}(t) | h_{max}(t) \rangle \geq \langle h_{c1}(t) | h_{c2}(t) \rangle$

A5: 单边 Laplace 变换性质: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)u(t) e^{-st} dt$; $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$

① $\mathcal{L}[\frac{d^n}{dt^n} f(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$; $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau) d\tau] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_0^0 f(\tau) d\tau}{s}$

② 卷积: 当 $f_1(t), f_2(t)$ 都因果时, $f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(s) F_2(s)$.

③ t move: $f(t-t_0)u(t-t_0) \rightarrow F(s) e^{-st_0}$.

五. ω 域信号与系统

1. 描述

① $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$: $j\omega$ 轴上的 Laplace.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ROC}(F(s)) \text{ 含 } j\omega \text{ 轴: } F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega} \\ \text{ROC}(F(s)) \text{ 不含 } j\omega \text{ 轴: } F(j\omega) \text{ 不存在} \\ \text{ROC}(F(s)) \text{ 以 } j\omega \text{ 轴为界:} \end{array} \right.$

eg. $j\omega$ 轴上有 k 重极点, 则如

$$F(s) = F_0(s) + \frac{k}{(s-j\omega_0)^k}$$

$$F(j\omega) = F_0(s)|_{s=j\omega} + \frac{k \cdot \pi j^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)}(\omega - \omega_0)$$

② $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

2. 求解

零状态下: $r(t) = e(t) * h(t)$, 故

$R(j\omega) = E(j\omega) \cdot H(j\omega)$ if $\text{ROC}(E), \text{ROC}(H)$ 含 $j\omega$ 轴.

能量信号:

$E_r(j\omega) = E_e(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2$

$R_r(t) = R_e(t) * h(t) * h^*(t) = R_e(t) * R_h(t)$

功率信号:

$P_r(j\omega) = P_e(j\omega) |H(j\omega)|^2$

$R_r(t) = R_e(t) * h(t) * h^*(t) = R_e(t) * R_h(t)$

3. 系统函数

① 可逆性: $H(j\omega) \cdot \tilde{H}(j\omega) = 1$

② 因果性: 对有理的 $H(j\omega)|_{j\omega=s} \rightarrow \text{ROC}$ 为含 $j\omega$ 的右半平面.

③ 稳定性: 恒稳定.

六. ω 域信号与系统

1. 描述

① $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn(\frac{T}{2})t} dt$

$$= \frac{1}{T} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} e^{-j \arctan \frac{b_n}{a_n}}$$

② $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn(\frac{T}{2})t}$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n(\frac{T}{2})t + b_n \sin n(\frac{T}{2})t)$$

2. 求解

零状态下: $r(t) = e(t) * h(t)$, 故

$R_n = E_n \cdot H_n \cdot \frac{1}{T}$

设 $e(t)$ 长 T_1 , $h(t)$ 长 T_2 , $r(t)$ 长 $T_3 = T_1 + T_2$.

以 $T (\geq T_3)$ 为周期将 e, h, r 周期延拓.

得 e_r, h_r, r_r , 分别作以 $\frac{T}{2}$ 为基频的 FS

即得 E_n, H_n, R_n .

3. 系统函数

① 可逆性 $H_n \cdot \tilde{H}_n = T, T \geq T_h + T_x$

② 因果性: 对有理的 $H_n|_{j\omega=s} \rightarrow \text{ROC}$ 为含 $j\omega$ 的右半平面

③ 稳定性: 恒稳定

($h(t)$ 为时限大的周期延拓).

A6: 周期信号的FT:

设 $f(t)$ 的周期为 T , 则

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}, \quad F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}), \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} F_T(\omega) \Big|_{\omega=n\frac{2\pi}{T}}$$

$$P(\omega) = \mathcal{F}[R_T(\omega)] = \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) f^*(t-T) dt \right] \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m^* e^{jm\frac{2\pi}{T}(t-T)} dt \right] \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{p,q} F_p F_q^* e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}(t-T)} dt \right] \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{p,q} F_p F_q^* e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} dt \right] \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ \sum_{p,q} F_p F_q^* e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} dt \right] \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ \sum_{p,q} F_p F_q^* e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} \delta_{p,q} \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ \sum_p |F_p|^2 e^{j(p-q)\frac{2\pi}{T}t} \right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})$$

A7: FT 性质:

① 对称: $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \Big|_{t=-\omega} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(t)] \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] \Big|_{\omega=-t}$

② 尺度: $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

③ t move: $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(\omega) e^{-j\omega t_0} \Rightarrow \mathcal{F}[f(at-t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{-j\omega t_0/a}$

④ ω move: $\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$

⑤ $\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow (j\omega)^n, \frac{d^n}{d\omega^n} \rightarrow (jt)^n, \int_{-\infty}^t \rightarrow \mathcal{F}[u(t)], \int_{-\infty}^{\omega} \rightarrow 2\pi \mathcal{F}^{-1}[u(\omega)]$

⑥ 卷积: $\mathcal{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2; \mathcal{F}[f_1 \cdot f_2] = \frac{1}{2\pi} F_1 * F_2$

$\mathcal{F}^{-1}[f_1(\omega) \cdot f_2(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[f_1(\omega)] * \mathcal{F}^{-1}[f_2(\omega)]; \mathcal{F}^{-1}[f_1 * f_2] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}(f_1) \cdot \mathcal{F}^{-1}(f_2)$

⑦ 相关: $\mathcal{F}[R_{f_2}(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2^*(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[R(t)] = |F(\omega)|^2$

A8: 由FS得到信号的频谱:

设 $f(t)$ 是长为 T 的时限信号, 将 $f(t)$ 作周期为 T 的周期延拓得 $f_T(t)$ ($T > 0$).

$f(t)$ 的FT: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

$f_T(t)$ 的FS: $F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\frac{2\pi}{T}t} dt$

由 $f(t) = f_T(t) [u(t) - u(t-T)] \cdot \frac{1}{T}$

$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot 2\pi \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}) * T \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{j\omega \frac{T}{2}} = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \cdot \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(\omega n \frac{2\pi}{T})\right] e^{j\omega \frac{T}{2}}$

编号:

班级:

姓名:

第 5 页

七. n-域信号与系统.

1. 描述

① $x(n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)$

② $x(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(m-n)$

2. 求解:

① 自由响应 + 强迫响应.

差分方程

$e(n)=0$
特征方程

$n \geq 0$

对应输入的特征系数排除法.

齐次解: 自由响应

特解: 强迫响应

$\sum C_k \alpha_k^n$

$D(n)$

\sum

含待定 C_k 的全响应

$y(n) \sim y(1) \xrightarrow{\text{迭代}} y(0) \sim y(N-1)$

全响应

② 零状态响应 + 零输入响应

零状态

零输入.

$e(n) \rightarrow H[e(n)] =$

$y(0) \sim y(N-1) \rightarrow H[\dots] =$

$r_{zs}(n) = \sum C_{zk} \alpha_k^n + D(n)$

$r_{zi}(n) = \sum C_{zk} \beta_k^n$

$\begin{cases} y_{zs}(N) \sim y_{zs}(1) = 0 \\ y_{zs}(0) \sim y_{zs}(N-1) \text{ 由迭代} \end{cases}$

$\begin{cases} y_{zi}(N) \sim y_{zi}(1) \text{ 已知} \\ y_{zi}(0) \sim y_{zi}(N-1) \text{ 无需求出.} \end{cases}$

$e(n)$ 中 $\delta(n)$ 及 $\delta(n-n_0)$ 的响应依 LTI 时不变性, 利用零输入的方法求出 (即 $h(n) = y(n)$ 取系数).

$$\begin{aligned} r(n) &= [r_{zs}(n) + r_{zi}(n)] u(n) = H[e(n)] + H[y(0) \sim y(N-1)] \\ &= H[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e(m) \delta(n-m)] + H[y(0) \sim y(N-1)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e(m) h(n-m) + H[y(0) \sim y(N-1)] \\ &= e(n) * h(n) + H[y(0) \sim y(N-1)] \end{aligned}$$

零状态线性 零输入线性.

3. 系统函数.

① 可逆性: $h(n) * \hat{h}(n) = \delta(n)$

② 因果性: $h(n) = h(n) u(n)$

③ 稳定性: BIBO:

$$\begin{aligned} |r(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e(n-m) \right| \\ &\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| |e(n-m)| \\ &\leq B \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| \end{aligned}$$

\therefore 应有 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| < \infty$.

A9: 因果信号和序列的 Hilbert 变换.

① 因果信号.

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[h(t)] * \mathcal{F}[u(t)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} [R(\omega) + jX(\omega)] * [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\pi R(\omega) + X(\omega) * \frac{1}{\omega}] + \frac{j}{2\pi} [\pi X(\omega) - R(\omega) * \frac{1}{\omega}]$$

$$= \left[\frac{R(\omega)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\xi)}{\omega - \xi} d\xi \right] + j \left[\frac{X(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\omega - \xi} d\xi \right]$$

$$\therefore R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\xi)}{\omega - \xi} d\xi$$

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\omega - \xi} d\xi$$

② 因果序列.

$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT} [2x_e(n)u(n) - x_e(0)\delta(n)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} [\text{Re} X(e^{j\omega}) * 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} X(e^{j\omega}) d\omega - \text{Re} X(e^{j\omega}) * j \cot \frac{\omega}{2}]$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} X(e^{j\omega}) d\omega$$

$$= \text{Re} X(e^{j\omega}) - \frac{j}{2\pi} \text{Re} X(e^{j\omega}) * \cot \frac{\omega}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \text{DTFT} [2x_o(n)u(n) + x_o(0)\delta(n)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} [j \text{Im} X(e^{j\omega}) * 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + j \int_{-\pi}^{\pi} \text{Im} X(e^{j\omega}) d\omega - j \text{Im} X(e^{j\omega}) * j \cot \frac{\omega}{2}]$$

$$+ X(0)$$

$$\therefore \text{Re}[X(e^{j\omega})] = X(0) + \frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} \text{Im}[X(e^{j\theta})] \cot \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) d\theta$$

$$\text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi} P \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}[X(e^{j\theta})] \cot \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) d\theta.$$

③ 因果频谱

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\omega)}{t - \tau} d\tau$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

④ 因果频谱

...

八. z 域信号与系统.

1. 描述.

$$① X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}, \quad z = r e^{j\theta}$$

$$ROC = \{z \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) z^{-n}| < \infty\} \text{ 环状.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{右边信号: } ROC = \{z \mid 0 < |z| < r_0\} \\ \text{左边信号: } ROC = \{z \mid |z| > r_0\} \\ \text{双边信号: } ROC = \{z \mid r_i < |z| < r_o\} \end{array} \right.$$

$$② X(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{p_i} \text{Res}[X(z) z^{n-1}, p_i]$$

($C \in ROC$), 对于同一 $X(z)$

$$\text{if } ROC = \{z \mid |z| \leq r_0\}, \quad x(n) = X(n) u(n)$$

$$\text{if } ROC = \{z \mid |z| \geq r_0\}, \quad x(n) = X(n) u(n)$$

$$\text{if } ROC = \{z \mid r_i < |z| < r_o\}, \quad x(n) = X_i u(n) + X_o u(n-1)$$

2. 求解

零状态系下 $x(t) = e^{ct} * h(t)$, 故

$$R(z) = E(z) \cdot H(z), \quad ROC(R) = ROC(H) \cap ROC(E)$$

线性常差描述的系统之 $H(z)$ 为有理函数.

$$\text{由代数基本定理, } H(z)/z = \prod_{i=1}^m (z - z_i) / \prod_{j=1}^n (z - p_j)$$

① 实单极点

$$\left\{ \begin{array}{l} m < n \text{ 部分分式 } k_i = (z - p_i) \frac{H(z)}{z} \Big|_{z=p_i} \\ m > n \text{ 长除法 } \mathcal{L}^{-1}(z^k) = \delta(n+k) \end{array} \right.$$

② 共轭极点

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1} \rightarrow \pm \sin(n\omega_0 T) u(n-1) \\ \frac{z(z - \cos(\omega_0 T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1} \rightarrow \pm \cos(n\omega_0 T) u(n-1) \end{array} \right.$$

③ 多重极点.

$$H(z) = \sum_{k=1}^n \frac{C_k z}{(z-p)^k} + \frac{\bar{f}(z)}{p(z)}$$

$$C_1 = \frac{X(z)(z-p)^1}{z} \Big|_{z=p} = X_1(z) \Big|_{z=p}$$

$$C_2 = \frac{X_1(z) - C_1}{z-p} \Big|_{z=p} = X_2(z) \Big|_{z=p}$$

$$C_3 = \frac{X_2(z) - C_2}{z-p} \Big|_{z=p} = X_3(z) \Big|_{z=p} \dots$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z-p)^n}\right] = \pm C_n^m u(n-1)$$

③. 系统函数.

① 可逆性: $H(z) \cdot \bar{H}(z) = 1$.

② 因果性: 对有限 $H(z)$, ROC 为某圆外区域, 与阶数 n 母阶.

③ 稳定性:

1) 稳定 $\Leftrightarrow ROC$ 含 $|z|=1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| \Big|_{|z|=1} < \infty \Rightarrow |H(z)| \Big|_{|z|=1} < \infty$$

2) 临界稳定 $\Leftrightarrow ROC$ 以 $|z|=1$ 为界

3) 不稳定 $\Leftrightarrow ROC$ 不含 $|z|=1$.

A90: z变换性质

- ① $n^m \rightarrow (-z \frac{d}{dz})^m$ R .
- ② $n \text{ move} \rightarrow X(n-n_0) \rightarrow z^{-n_0} X(z)$ R (可能增加或删除 $0, \infty$)
- ③ R 度: $z_0^n x(n) \rightarrow X(\frac{z}{z_0})$ $z_0 R$.
- ④ n 反转: $X(n) \rightarrow X(z^{-1})$ R^{-1}
- ⑤ 共轭: $X^*(n) \rightarrow X^*(z^*)$ R .
- ⑥ 卷积: $X_1(n) * X_2(n) \rightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$ 至少 $R_1 \cap R_2$.
- ⑦ 初值: $x(n) = X(z) u(n)$, 则 $X(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, $X(k) = z^k [X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} X(n) z^{-n}]$ $z \rightarrow \infty$
- ⑧ 终值: $x(n) = X(z) u(n)$ 且 $X(z)$ 稳定 or 一阶极点 $p=1$, 则 $X(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) X(z)$.
- ⑨ 相关: $X_1(n) * X_2(n) \rightarrow X_1(z) \cdot X_2(\frac{1}{z})$.

A10:

- ① 暂态响应: $R(z)$ 稳定 $\Rightarrow H \& E$ 稳定
 稳态响应: $R(z)$ 临界稳定 $\Rightarrow H|E$ 临界稳定
 发散响应: $R(z)$ 不稳定 $\Rightarrow H|E$ 不稳定.
 特例: H, E 零极相消.
- ② 自由响应: $H(z)$ 造成
 强迫响应: $E(z)$ 造成
 特例: H 和 E 有相同极点. 将 $R(z)$ 部分分式分解后极点阶数与 H 相同的项为自由响应
- ③ 一阶全通系统 $H_1(z) = \frac{z^{-1} - z_p^*}{1 - z_p z^{-1}}$, 二阶: $H_2(z) = \frac{z^{-1} - z_p^*}{1 - z_p z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - z_p}{1 - z_p^* z^{-1}}$, 一般: $H_{ap}(z) = \prod_i H_{i1}(z) \prod_j H_{i2}(z)$
 性质: $-\frac{d}{d\omega} \phi_{ap}(\omega) > 0$.
 最小相位系统: 零极点都在单位圆内 ($z < 1$).
 性质: 稳定、因果的即最小相位系统, $H(z) = H_{ap}(z) \cdot H_{min}(z)$.
 性质: $-\frac{d}{d\omega} \phi(\omega) > -\frac{d}{d\omega} \phi_{min}(\omega)$, 且 $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$, 则 $\langle h_{min}(n), h_{min}(n) \rangle \geq \langle h(n), h(n) \rangle$

A12: 单位z变换性质: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) u(n) z^{-n}$, $x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$.

① 卷积: 当 $x_1(n), x_2(n)$ 都因果时, $x_1(n) * x_2(n) \rightarrow X_1(z) X_2(z)$

② n move: $\sum [x(n+m) u(n)] = z^m [X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k}]$

$\sum [x(n-m) u(n)] = z^{-m} [X(z) + \sum_{k=0}^{m-1} x(k) z^{-k}]$.

(科目:) 数 学 作 业 纸

编号:

班级:

姓名:

第 7 页

九. ω 域信号与系统.

1. 描述

① $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$: $|z|=1$ 上的 ZT

ROC $X(z)$ 含 $|z|=1$: $X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$

ROC $X(z)$ 不含 $|z|=1$: $X(e^{j\omega})$ 不存在.

ROC $X(z)$ 以 $|z|=1$ 为界, $|z|=1$ 上 k 重极点则...

② $X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

2. 求解

零状态下: $r(n) = e(n) * h(n)$, 故

$R(e^{j\omega}) = E(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$ 若 $\text{ROC}(E) \cap \text{ROC}(H) \neq \emptyset$

能量信号:

$E_r(e^{j\omega}) = \sum_n |e(n)|^2$

$R_r(n) = R_e(n) * h(n) * h^*(-n) = R_e(n) * R_h(n)$

功率信号:

$P_r(e^{j\omega}) = P_e(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2$

$R_r(n) = R_e(n) * h(n) * h^*(-n) = R_e(n) * R_h(n)$

3. 系统函数.

① 可逆性: $H(e^{j\omega}) \cdot \tilde{H}(e^{j\omega}) = 1$.

② 因果性: 对有理的 $H(e^{j\omega})|_{z=e^{j\omega}}$, ROC 含 $|z|=1$ 圆内面

③ 稳定性: 恒稳定

十. ω 域信号与系统

1. 描述

① $X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W^{-nk}$

② $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j(\frac{2\pi}{N})nk} = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W^{nk}$

2. 求解

零状态下: $r(n) = e(n) * h(n)$, 故

$R(k) = E(k) \cdot H(k)$

设 $e(n)$ 长 N_1 , $h(n)$ 长 N_2 , $r(n)$ 长 $N_3 = N_1 + N_2 - 1$

以 $N (> N_3)$ 为周期将 e, h, r 周期延拓

得 e_N, h_N, r_N , 分别作以 N 为基频的 DFS,

即得 $E(k), H(k), R(k)$.

3. 系统函数

① 可逆性: $H(k) \cdot \tilde{H}(k) = 1, N > N_h + N_e$

② 因果性: 对有理的 $H(k)|_{z=e^{j\omega}}$, ROC 含 $|z|=1$ 圆内面

③ 稳定性: 小恒稳定

($h(n)$ 为有限长的周期延拓).

Ans: 周期序列的 DTFT.

设 $x(n)$ 的周期为 N , 则

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r), \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = X_w(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

$$P(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[R(m)] = \dots$$

Ans: DTFT 性质:

① n move $x(n-n_0) \rightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

② ω move $e^{j\omega n_0} x(n) \rightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

③ $n \rightarrow j \frac{d}{d\omega}$

④ 卷积 $x(n) * y(n) \rightarrow X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$

$$x(n) \cdot y(n) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

⑤ 相关 $R_{xy}(m) \rightarrow X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega})$

Ans: 由 DFS 得到序列的频谱.

设 $x(n)$ 是长为 N_0 的有限信号, 将 $x(n)$ 作周期为 N 的周期延拓得 $X_N(n)$ ($N > N_0$)

$x(n)$ 的 DTFT: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{j\omega n}$

$X_N(n)$ 的 DFS: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X_N(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$

由 $x(n) = X_N(n) [u(n) - u(n-N)]$, 得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r) * \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\omega}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}}$$

十一. 抽样.

1. 时域非周期信号时域抽样.

① $f(t) \rightarrow f(nT) = X(n)$.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega nT} d\Omega e^{jn\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) d\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn(\Omega T - \omega)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) d\Omega 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega T - \omega - 2\pi r) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) d\Omega \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{\omega}{T} - \frac{2\pi}{T} r) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(j(\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi}{T} r)). \end{aligned}$$

② $f(t) \rightarrow f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

$$\begin{aligned} F_s(j\Omega) &= \mathcal{F}[f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)] \\ &= \frac{1}{2\pi} F(j\Omega) * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \frac{2\pi}{T} r) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(j(\Omega + j\frac{2\pi}{T} r)). \end{aligned}$$

2. 时域周期信号时域采样.

(信号周期 T 是采样周期 T_s 的 N 倍).

① $f(t) \rightarrow f(nT_s) = X(n)$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm(\frac{2\pi}{N})nT_s} e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(\frac{2\pi}{N}m - \frac{2\pi}{N}k)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(m-k-rN) \\ &= N \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_{k+rN}. \end{aligned}$$

② $f(t) \rightarrow f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)] e^{jm(\frac{2\pi}{T})t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l e^{jl(\frac{2\pi}{T})t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) e^{jm(\frac{2\pi}{T})t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) e^{j\frac{2\pi}{T} nT_s(l-m)} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T} nT_s(l-m)} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l \cdot 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[\frac{2\pi}{N}(l-m) - 2\pi r] \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l \cdot \frac{N}{2\pi} \delta(l-m-rN) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} F_{m+rN} \end{aligned}$$

3. 频域非周期信号频域抽样

① $F(j\omega) \rightarrow F(jn\Omega) = F_n$

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(jn\Omega) e^{jn\Omega t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{jn\Omega \tau} d\tau \cdot e^{jn\Omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega(t-\tau)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \cdot 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[\Omega(t-\tau) - 2\pi r] \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t + \frac{2\pi}{\Omega} r) \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(t - \frac{2\pi}{\Omega} r) \end{aligned}$$

② $F(j\omega) \rightarrow F(j\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_s(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)] \\ &= f(t) * \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\frac{2\pi}{\Omega}) \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t - \frac{2\pi}{\Omega} m). \end{aligned}$$

A16: FFT.

① 基2 DIT

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)k} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^{rk} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2r(k+\frac{N}{2})} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_N^{(2r+1)(k+\frac{N}{2})} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^{k\frac{N}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} - W_N^{k\frac{N}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1) W_{N/2}^{rk}$$

② 基2 DIF

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_{N/2}^{rn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(m+\frac{N}{2}) W_N^{r(m+\frac{N}{2})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n+\frac{N}{2})] W_{N/2}^{rn}$$

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{(2r+1)n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^n W_N^{2rn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n+\frac{N}{2}) W_N^{(2r+1)(n+\frac{N}{2})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) - x(n+\frac{N}{2})] W_N^n W_{N/2}^{rn}$$

③ 基4 DIT

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r) W_N^{4rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+1) W_N^{(4r+1)k} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+2) W_N^{(4r+2)k} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+3) W_N^{(4r+3)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r) W_{N/4}^{rk} + W_N^{rk} \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+1) W_{N/4}^{rk} + W_N^{2k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+2) W_{N/4}^{rk} + W_N^{3k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{4}-1} x(4r+3) W_{N/4}^{rk}$$

$$X(k + \frac{N}{4}) = \dots + W_N^{k\frac{N}{4}} \dots + W_N^{2k\frac{N}{4}} \dots + W_N^{3k\frac{N}{4}} \dots$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = \dots$$

$$X(k + \frac{3N}{4}) = \dots$$

④ 基4 DIF

$$X(4r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(n) W_N^{4nr} + \sum_{n=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{4nr} + \sum_{n=\frac{3N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{4nr} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{\frac{3N}{4}-1} x(n) W_N^{4nr}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(n) W_{N/4}^{nr} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(n+\frac{N}{4}) W_{N/4}^{(n+\frac{N}{4})r} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(n+\frac{N}{2}) W_{N/4}^{(n+\frac{N}{2})r} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x(n+\frac{3N}{4}) W_{N/4}^{(n+\frac{3N}{4})r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} [x(n) + x(n+\frac{N}{4}) + x(n+\frac{N}{2}) + x(n+\frac{3N}{4})] W_{N/4}^{nr}$$

$$X(4r+1) = \dots$$

$$X(4r+2) = \dots$$

$$X(4r+3) = \dots$$

⑤ 分裂基 DIT

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(4r+1) W_N^{(4r+1)k} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(4r+3) W_N^{(4r+3)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r) W_{N/2}^{rk} + W_N^{rk} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(4r+1) W_{N/4}^{rk} + W_N^{3k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(4r+3) W_{N/4}^{rk}$$

⑥ 分裂基 DIF

4. 周期信号频域采样

$$y(n) = \sum_k h(k) x(n-k) \text{ or } \sum_k h(n-k) x(k)$$

(频率周期为采样周期 Ω_s 的 N 倍)

$$Y(z) = \sum_m y(m) z^{-m} = \sum_m w(m) z^{-m}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n) \cdot z^{-\gamma n} \cdot \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} l n}$$

$$X(e^{j\omega}) \rightarrow X(e^{j k \Omega_s}) = X(k)$$

$$X_s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j k \Omega_s}) e^{j \frac{2\pi}{N} k n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{j m (k \Omega_s)} e^{j \Omega_s \cdot n k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \Omega_s k (n-m)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{r=0}^{\infty} \delta(n-m+rN)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} x(n+rN)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n) e^{j \frac{2\pi}{M} l n} \cdot z^{-\gamma n}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} W(e^{j \frac{2\pi}{M} l} \cdot z^{\frac{1}{M}})$$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H(e^{j(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi}{M} l)}) X(e^{j(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi}{M} l)})$$

$$\Rightarrow X(e^{j \frac{\omega}{M}}), |\omega| \leq \pi$$

$$\textcircled{2} X(e^{j\omega}) \rightarrow X(e^{j\omega}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \Omega_s)$$

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \Omega_s) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{j m \omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \Omega_s) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - k \Omega_s) e^{j\omega(n+m)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j \Omega_s k (n+m)}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[\Omega_s(n-m) + 2\pi r]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{\Omega_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(m-n+rN)$$

$$= \frac{1}{\Omega_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

6. 用整数 L 内插的升采样

先补零再滤波: $x(n) \xrightarrow{\uparrow} w(n) \xrightarrow{h(n)} y(n)$

$$\begin{cases} w(n) = x(n/L) \\ y(n) = \sum_k h(n-k) w(k) \end{cases}$$

$$\therefore y(n) = \sum_k h(n-k) x(k/L) \text{ or } \sum_k h(n-kL) x(k)$$

$$\therefore Y(z) = H(z) W(z)$$

$$= H(z) \sum_m w(m) z^{-m}$$

$$= H(z) \sum_m x(m) z^{-mL}$$

$$= H(z) X(z^L)$$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega L})$$

$$\Rightarrow X(e^{j\omega L}), |\omega| \leq \pi$$

7. 先内插再抽取的分数采样

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M-1} h(n-r) \cdot x(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H(e^{j(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi}{M} l)}) X(e^{j(\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi}{M} l)})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} X(e^{j \frac{\omega}{M}}), |\omega| \leq \min\{\pi, \pi \cdot \frac{M}{2}\}$$

5. 用整数 M 抽取的降采样

先滤波再抽取: $x(n) \xrightarrow{h(n)} w(n) \xrightarrow{\downarrow} y(n)$

$$\begin{cases} w(n) = \sum_k h(k) x(n-k) \\ y(n) = w(Mn) \end{cases}$$

$$\end{cases}$$

最小相位：幅频一样的系统中 延迟最小的。

(科目:) 数 学 作 业 纸

编号:

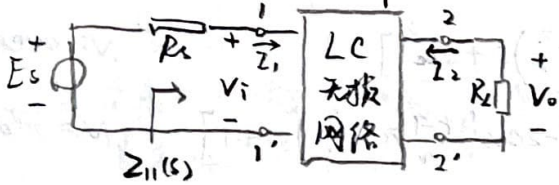
班级:

姓名:

第 10 页

十一. 模拟和数字滤波器.

1. 模拟滤波器的设计



问题: 已知 $H_a(s) = \frac{V_o(s)}{E_s(s)}$ 稳定、因果、最小相位、共轭对称。给定 $|H_a(j\omega)|$ 求 $Z_1(s)$; 由 $Z_1(s)$, 求网络结构。

求解: 由 $|H_a(j\omega)|^2_{j\omega=s} = H_a(s)H_a(-s)$ 及其它

已知条件可得到 $H_a(s)$ 表达式。

信源额定功率: $P_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{|E_s|^2}{4R_s}$

负载功率: $P_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{|V_o|^2}{R_L}$

功率传输函数: $|K|^2 = \frac{P_L}{P_m} = \frac{4R_s |V_o|^2}{R_L |E_s|^2}$

反射系数: $|P|^2 = 1 - \frac{4R_s}{R_L} |H_a(s)|^2$

由于网络无损, 1-1' 端输入功率 $P_1 = P_2$,

$\frac{1}{2} \text{Re}[Z_{11}(s)] |I_1(s)|^2 = \frac{1}{2} \frac{|V_o(s)|^2}{R_L}$

$\frac{|V_o|^2}{Z_1} = R_L \cdot \text{Re}[Z_1(s)]$

$\frac{E_s}{Z_1} = R_s + Z_1(s)$

$|H_a(s)|^2 = \left| \frac{V_o}{Z_1} \right|^2 \left| \frac{Z_1}{E_s} \right|^2 = \frac{R_L \cdot \text{Re}[Z_1(s)]}{|R_s + Z_1(s)|^2}$

$|P(s)|^2 = \frac{|Z_1 - R_s|^2}{|Z_1 + R_s|^2} > p(s) = \pm \frac{Z_1 - R_s}{Z_1 + R_s}$

$Z_1(s) = R_s \cdot \frac{1 \pm p(s)}{1 \mp p(s)}$

① Foster 法: { 串联: $Z_1(s) = \Pi \dots$
并联: $Z_1(s) = \Sigma \dots$

② Cauer 法: { T型: s 逐分式
Π型: $\frac{1}{s}$ 逐分式.

2. 模拟滤波器的频率变换.

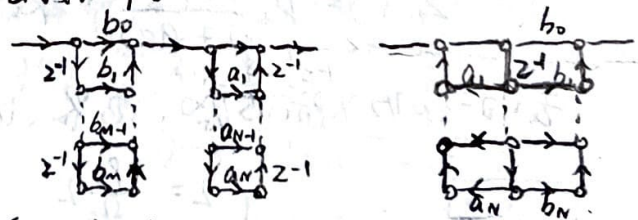
原型:	s'	$s'L'$	$\frac{1}{s'C'}$
低通:	$\frac{s}{\Omega_c}$	$s \frac{R_c L'}{\Omega_c}$	$\frac{R_c R_s}{s C'}$
高通:	$\frac{\Omega_c}{s}$	$\frac{1}{s \Omega_c R_s L'}$	$s \frac{R_s}{C' \Omega_c}$
带通:	$\frac{s^2 + \Omega_0^2}{s \Omega_c}$	$s \frac{R_s L'}{\Omega_c} + \frac{\Omega_c}{s \Omega_c^2 R_s L'}$	$s \frac{R_c R_s}{\Omega_c^2 C'} // \frac{R_s}{s \Omega_c R_s}$
带阻:	$\frac{s \Omega_c}{s^2 + \Omega_0^2}$	$s \frac{\Omega_c R_s L'}{\Omega_c^2} // \frac{1}{s \Omega_c R_s L'}$	$s \frac{R_s}{\Omega_c C'} + \frac{\Omega_c R_c}{s \Omega_c^2 R_s}$

3. ZZR 结构.

$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$

$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$

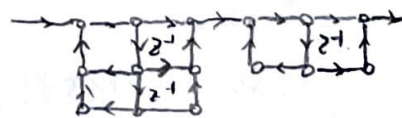
① 直接结构.



延时单元最少

零极点可调整; 有限字长量. 四大.

② 级联结构.



延时单元最少, 零极点可调.

零极点配对, 按增益逐次递进排列 (量化噪声角度) 或按极点离单位圆距离递减排列 (信号衰减角度).

③ 并联结构:

Ans: Butterworth 滤波器设计

$$\text{已知 } |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \rightarrow \text{故 } |H_a(s)|^2 = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

$$\text{极点 } s_k = \Omega_c e^{j[\frac{1}{2N}(2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}]} \quad , k=1, 2, \dots, 2N$$

取所有左半平面的极点作为 $H_a(s)$ 的极点 以获得稳定的 $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} = \begin{cases} \Omega_c^N / \prod_{k=1}^{N/2} (s + \Omega_c) [s^2 - 2\Omega_c \cos(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2})s + \Omega_c^2] & N = \text{odd} \\ \Omega_c^N / \prod_{k=1}^{N/2} [s^2 - 2\Omega_c \cos(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2})s + \Omega_c^2] & N = \text{even} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 / \prod_{k=1}^{N/2} (s'+1) [s'^2 - 2\cos(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2})s'+1] & N = \text{odd} \\ 1 / \prod_{k=1}^{N/2} [s'^2 - 2\cos(\frac{2k-1}{2N}\pi + \frac{\pi}{2})s'+1] & N = \text{even} \end{cases}$$

以上是经过归一化 $s' = s/\Omega_c$ 后的结果。给定通带和阻带后可解出 N 和 Ω_c ，以得到 $H_a(s)$ 。一般有 $R_s = R_L$ ，故 $H_a(j\omega) = \frac{1}{2}$ ，因此

$$p(s')p(s') = 1 - \frac{4R_s}{R_L} \frac{1/2}{\sqrt{1+(s'/j)^{2N}}} \cdot \frac{1/2}{\sqrt{1+(-s'/j)^{2N}}} = 1 - \frac{1}{1+(-1)^N (s')^{2N}} = \frac{(s')^N - (-s')^N}{B_N(s') B_N(-s')}$$

$$\therefore p(s') = \frac{(s')^N}{B_N(s')}$$

$$\therefore Z_1(s') = R_s \frac{1 \pm p(s')}{1 \mp p(s')} = R_s \frac{B_N(s') \pm (s')^N}{B_N(s') \mp (s')^N}, \text{ 对 } \frac{1}{s} \text{ 源内阻归一化: } \frac{Z_1(s')}{R_s} = \frac{B_N(s') \pm (s')^N}{B_N(s') \mp (s')^N}$$

去归一化的实际电感、电容、电阻值:

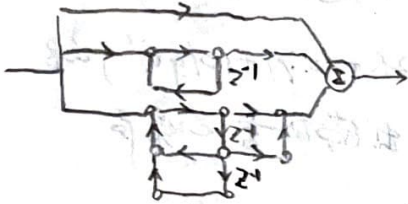
$$\begin{cases} L = \frac{R_s}{\Omega_c} L' \\ C = \frac{1}{\Omega_c R_s} C' \\ R_L = R_s \end{cases}$$

编号:

班级:

姓名:

第 11 页



运算速度快; 极点可调; 各节子系统的运算误差互不影响.

4. ZLR 设计

① 冲激不变法

原理: $h(nT_s) = h_a(t)|_{t=nT_s}$.

$$\text{结果: } \frac{1}{s-s_i} \Rightarrow \frac{1}{1-e^{s_i T_s} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T_s} + j\frac{2\pi}{T_s} k)$$

结论: 有混叠, 高频失真.

② 双线性变换法

原理: $s \rightarrow s_1$ 平面:

$$\begin{cases} s = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{1-e^{-s_1 T_s}}{1+e^{-s_1 T_s}} \\ \Omega_1 = \frac{2}{T_s} \cdot \arctan \frac{\Omega}{T_s/2} \end{cases}$$

$s_1 \rightarrow z$ 平面:

$$\begin{cases} z = e^{s_1 T_s} \\ \omega = \Omega T_s \end{cases}$$

$$\text{结果: } s = \frac{T_s}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

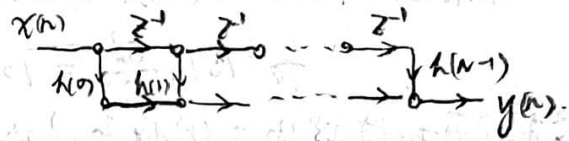
结论: 无混叠, 非线性失真.

5. FIR 结构

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

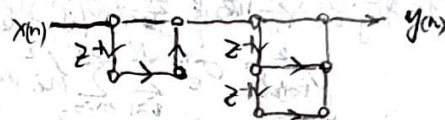
$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} h(r) x(n-r)$$

① 直接结构 (横向/卷积形式滤波器)



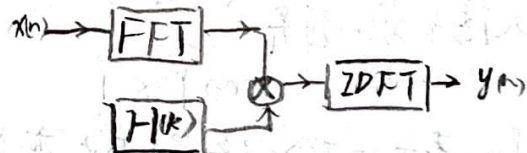
零点可控.

② 级联结构



零点可调.

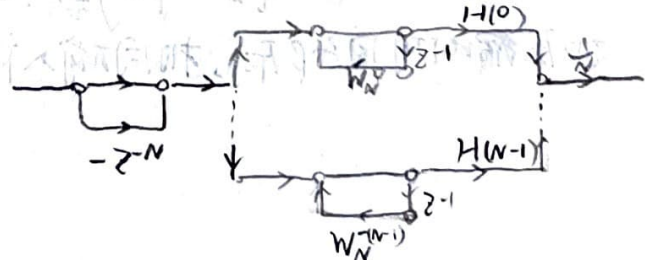
③ 快速卷积结构.



运算速度快.

④ 频率取样结构 (梳齿滤波器)

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(k) W_N^{nk} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} (1-z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$



⑤ 线性相位 FIR 的结构.

$$H(e^{j\omega}) = |\hat{H}(e^{j\omega})| e^{-j(\beta + \alpha\omega)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = \pm \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \end{cases}$$

1) 直接结构

A.8 :	分布	均值	方差
截尾误差	$U(-q, 0)$	$-\frac{q}{2}$	$\frac{q^2}{12} = \frac{1}{12} \times 2^{-2b}$
舍入误差	$U(-\frac{q}{2}, \frac{q}{2})$	0	$\frac{q^2}{12} = \frac{1}{12} \times 2^{-2b}$

一般采用定量化制补码表数舍入处理 分析量化噪声. 定义

$$\sigma_q^2 = 10 \lg \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = 10 \lg \left(\frac{\sigma_x^2}{\frac{1}{12} \times 2^{-2b}} \right) = (6.02b + 10.79 + 10 \lg \sigma_x^2) \text{ dB}$$

根据随机过程通过线性系统的理论, 数字系统输出端的量化噪声

$$\sigma_q^2 = \sigma_e^2 \sum_{m=0}^{\infty} h^2(m) = \sigma_e^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

多源噪声在输出端满足叠加原理

$$\sigma_{\text{total}}^2 = \sigma_e^2 \sum_{i=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} h_i^2(m)$$

以上输出噪声的计算在各节点不叠加溢出时才正确, 为保证此, 各节点变量定量化

$$|w(n)| \leq 1$$

若输入信号 $x(n)$ 有界:

$$|x(n)| \leq 1$$

又设 $f(n)$ 表示由输入端到节点变量 $w(n)$ 间的单位抽样响应, 有

$$w(n) = f(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) x(n-m)$$

则需在节点变量 $w(n)$ 输入处除以 β , 在输出处乘以 β , β 的取值准则:

$$\begin{cases} l_1: \beta = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| = \|f\|_1 \\ l_2: \beta = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} f^2(n)} = \|f\|_2 \end{cases}$$

加压缩比到因子 β 后, 相同输入下 输出端量化噪声增加 (因 β 带来噪声源增加)

电阻热噪声: $W_v(f) = 4kTR(f)$, $W_i(f) = 4kTG(f)$. (功率谱密度)

晶体管噪声: 电阻热噪声 $W_v(f) = 4kTR_{bb}$

散粒噪声 $W_i(f) = 2q I_{E/C0}$

分配噪声 $W_i(f) = 2q I_c (1 - \frac{\alpha(f)^2}{\alpha_0})$

1/f 噪声 $W_i(f) = \frac{K}{f} \cdot \frac{I}{A}$

MOSFET 噪声: --

$$W_{\text{out}}(f) = |H(f)|^2 W_{\text{in}}(f)$$

编号:

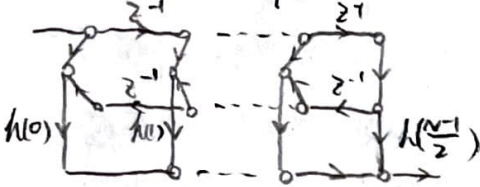
班级:

姓名:

第 12. 页

a. $h(n)$ 偶, N 奇

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos \omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right\}$$



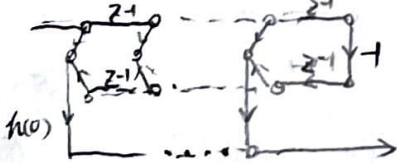
b. $h(n)$ 偶, N 偶: $()_{\omega=\pi} = 0$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right\}$$



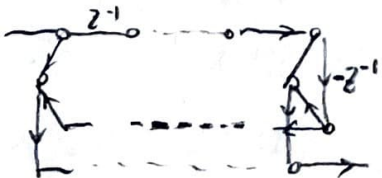
c. $h(n)$ 奇, N 奇: $()_{\omega=0, \pi} = 0$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ j \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \sin \omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right\}$$



d. $h(n)$ 奇, N 偶: $()_{\omega=0} = 0$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ j \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \omega \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \right\}$$



② 频率取样法.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} e^{j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\omega \frac{N-1}{2} k} \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{\sin \frac{1}{2}(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}$$

在取样点上与要求一致; 通带和阻带起伏大
通常在通带和阻带间设置若干个“约束”
频率取样值.

7. 数字滤波器的频率变换.

① z 单位圆 \rightarrow G(z) 单位圆: $|G(e^{j\omega})| = 1$

② $|z| >, =, < 1 \rightarrow |G(z)| >, =, < 1$

③ $H(z)$ 有理 $\rightarrow H(G(z))$ 有理

$\therefore G(z) = \pm \frac{D(z)}{z^N D(z^*)}$: $G(z)$ 转 1 周 \rightarrow 转 N 周.

\therefore 根据指标滤波器通带个数可确定 N .

原型	z	$z=1$	$e^{j\omega_0}$	$e^{j\omega_0}$
低通	$\frac{z-d_1}{1-d_1 z}$	1		$e^{j\omega_0}$
高通	$-\frac{z+d_1}{1+d_1 z}$	-1		$e^{j\omega_0}$
带通	$-\frac{z^2+d_1 z+d_2}{1+d_1 z+d_2 z^2}$	$e^{j\omega_0}$	$e^{j\omega_0}$	$e^{j\omega_0}$
带阻	$\frac{z^2+d_1 z+d_2}{1+d_1 z+d_2 z^2}$	± 1	$e^{j\omega_0}$	$e^{j\omega_0}$

2) 级联结构:

零点对单位圆呈镜像、反演分布

6. FIR 设计

① 窗函数法.

主瓣带宽 $\uparrow \rightarrow$ 最大旁瓣电平 $\downarrow \rightarrow$

过渡带宽度 $\uparrow \rightarrow$ 带内阻带起伏 \downarrow .

十三. 状态空间

1. 连续时间系统状态方程的建立
(积分器输出作为状态变量)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \lambda(t) = A \lambda(t) + B e(t) \\ r(t) = C \lambda(t) + D e(t) \end{cases}$$

3. 离散时间系统状态方程的建立.
(延时器输出作为状态变量).

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = A \lambda(n) + B x(n) \\ y(n) = C \lambda(n) + D x(n) \end{cases}$$

4. 离散时间系统状态方程的求解

2. 连续时间系统状态方程的求解.

① t域

由状态方程得 $\frac{d}{dt} [e^{At} \lambda(t)] = e^{At} B e(t)$

解得 $\lambda(t) = e^{At} \lambda(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B e(\tau) d\tau$

$= e^{At} \lambda(0) + e^{At} B * e(t)$

$\therefore r(t) = C e^{At} \lambda(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B e(\tau) d\tau + D e(t)$

$= C e^{At} \lambda(0) + [C e^{At} B + D \delta(t)] * e(t)$

② s域

由状态方程得 $s \Lambda(s) - \lambda(0) = A \Lambda(s) + B E(s)$

解得 $\Lambda(s) = (sI - A)^{-1} \lambda(0) + (sI - A)^{-1} B E(s)$

$\therefore \lambda(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1} \lambda(0) + (sI - A)^{-1} B * e(t)]$

$\therefore r(t) = C \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1} \lambda(0) +$

$[C \mathcal{L}^{-1} (sI - A)^{-1} B + D \delta(t)] * e(t)$

零状态时, $\Lambda(s) = (sI - A)^{-1} B E(s)$

得 $R(s) = C (sI - A)^{-1} B E(s) + D E(s)$

$\therefore H(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$

$= C \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|} \cdot B + D$

$\therefore h(t) = C e^{At} B u(t) + D \delta(t)$

e^{At} : 状态转移阵

$(sI - A)^{-1}$: 特征阵

$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}]$

① n域

由状态方程得 $\lambda(n) = K A^n u(n) + x(n) * h_0(n)$

解得 $K = \lambda(0), h_0(n) = A^{n-1} u(n-1) B$

$\therefore \lambda(n) = A^n \lambda(0) u(n) + A^{n-1} B * x(n) u(n-1)$

$\therefore y(n) = C A^n \lambda(0) u(n) + C A^{n-1} B * x(n) u(n-1) + D x(n) u(n)$

② z域

由状态方程得 $z \Lambda(z) - z \lambda(0) = A \Lambda(z) + B X(z)$

解得 $\Lambda(z) = (zI - A)^{-1} z \lambda(0) + (zI - A)^{-1} B X(z)$

$\therefore \lambda(n) = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} z] \lambda(0) + \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} B] * x(n)$

$\therefore y(n) = C \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} z] \lambda(0) +$

$[C \mathcal{Z}^{-1} (zI - A)^{-1} B + D \delta(n)] * x(n)$

零状态时, $\Lambda(z) = (zI - A)^{-1} B X(z)$

得 $Y(z) = C (zI - A)^{-1} B X(z) + D X(z)$

$\therefore H(z) = C (zI - A)^{-1} B + D$

$= C \cdot \frac{\text{adj}(zI - A)}{|zI - A|} \cdot B + D$

$\therefore h(n) = C A^{n-1} B u(n-1) + D \delta(n)$

A^n : 状态转移阵

$(zI - A)^{-1} z$: 特征阵

$A^n = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1} z]$

$A^{n-1} = \mathcal{Z}^{-1} [(zI - A)^{-1}]$

Ap: 状态变量的线性变换

$$\lambda = P\lambda$$

$$\Rightarrow A' = PAP^{-1}, B' = PB, C' = CP^{-1}, D' = D, H'(s/z) = H(s/z).$$

由A的特征方程解出的特征阵P使A成为Jordan阵:

\Rightarrow { 各子Jordan块最后一行在B中对应元不含0, 或 $M = (CB|AB| \dots |A^{n-1}B)$ 满秩: 可控
 { 各子Jordan块第一行在C中对应元不含0, 或 $N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ 满秩: 可观.

(Faint handwritten notes and equations, including matrix manipulations and transfer function derivations, are visible in the background.)